Pseudo-Euclidean Hurwitz pairs in any signature

1990 J. Phys. A: Math. Gen. 23 2729

(http://iopscience.iop.org/0305-4470/23/13/013)

J. Phys. A: Math. Gen. **23** (1990) 2729-2749. Printed in the UK

Paires de Hurwitz pseudo-euclidiennes en signature quelconque

Louis-Samuel Randriamihamison

UER de Mathématiques, Université Paul Sabatier, 118 Route de Narbonne, 31 062 Toulouse Cedex, France

Reçu 28 Novembre, présentation definitive 16 Mars 1990

Abstract. We consider the pseudo-Euclidean Hurwitz problem, as formulated in a recent study by Lawrynowicz and Rembielinsky. However, we adopt a more coordinate-free approach, and employ the spinorial formalism developed by Crumeyrolle to solve this problem completely. Our results in part disagree with those of Lawrynowicz and Rembielinsky; in particular we uncover some extra possibilities.

We also give a link between pseudo-Euclidean Hurwitz pairs and Z_2-graded Lie algebras, and discuss the introduction of some fibre bundle with pseudo-Euclidean Hurwitz pairs.

1. Introduction

Dans un article paru en 1923 [6], Hurwitz résolvait le problème de déterminer toutes les paires d'entiers positifs (m, p): $m \leqslant p$, et tous les systèmes de nombres réels $C^k_{j\alpha}$, $\alpha = 1, \ldots, m; j, k = 1, \ldots, p$ tel que le système des formes bilinéaires $\eta_j = \sum_{\alpha,k} x^\alpha C^k_{j\alpha} y_k$ vérifie la relation:

$$\sum_j (\eta_j)^2 = \left(\sum_\alpha (x^\alpha)^2\right)\left(\sum_k (y_k)^2\right).$$

Dans le cas particulier où $m = p$, le problème de Hurwitz peut se poser de la manière suivante: soit M un espace vectoriel réel, de dimension m, muni d'une forme quadratique Q, définie positive. Existe-t-il une application bilinéaire f de $M \times M$ dans M, telle que:

$$Q(f(x, y)) = Q(x)Q(y) \qquad \text{pour tout } x \text{ et } y \text{ de } M.$$

Dans ce cas, les solutions du problème sont les algèbres des nombres réels, complexes, des quaternions et des octonions [5].

D'autre part, si Q est non dégénérée, de signature quelconque, alors pour $m \neq 1$, 2, 4, 8 il n'existe pas d'application bilinéaire f solution du problème de Hurwitz [2].

Signalons que, depuis Hurwitz, un certain nombre d'auteurs se sont intéressé à ce sujet. De nombreux travaux ont été effectués mettant en relation le problème de Hurwitz avec diverses branches des mathématiques. On pourra trouver une présentation de ces travaux dans l'article de Shapiro [11].

Dans un récent papier, Lawrynowicz et Rembielinsky donnent une formulation plus générale du problème de Hurwitz.

Définition 1.1 [8]. Une paire de Hurwitz pseudo-euclidienne est définie par la donnée de:

- un espace vectoriel réel F, de dimension m, muni d'une forme quadratique non dégénérée Q_0, pseudo-euclidienne, de signature (ρ, σ);
- une espace vectoriel réel $\mathscr{S}$, de dimension s, muni d'une forme bilinéaire non dégénérée Λ, symétrique ou antisymétrique;
- une application bilinéaire f: $F \times \mathscr{S} \to \mathscr{S}$, vérifiant:

(i) il existe une unique élément ε_0 de F tel que:

$$\forall \varphi \in \mathscr{S} \qquad f(\varepsilon_0, \varphi) = \varphi$$

(ii) $\forall a \in F$, $\forall \varphi, \psi \in \mathscr{S}$, on a:

$$\Lambda(a\varphi, a\psi) = Q_0(a)\Lambda(\varphi, \psi) \text{ où l'on note } f(a, \varphi) = a\varphi$$

pour simplifier;

(iii) F opère sur $\mathscr{S}$ de manière irréductible: il n'existe pas de sous-espace propre de $\mathscr{S}$ stable pout l'action de F sur $\mathscr{S}$ definie par l'application f.

Nous dirons alors que $\{(F, Q_0), (\mathscr{S}, \Lambda)\}$ est une paire de Hurwitz pseudo-euclidienne, de dimension (m, s).

Le problème de Hurwitz pseudo-euclidien consiste à déterminer les dimensions m et s convenables, ainsi que toutes les formes bilinéaires non-dégénérées Λ sur $\mathscr{S}$ vérifiant la condition (ii).

Dans la résolution de ce problème, Lawrynowicz et Rembielinski utilisent essentiellement un formalisme matriciel, et ils montrent que ce problème est relié aux algèbres de Clifford et à leurs représentations matricielles.

Dans ce papier, nous reprenons et résolvons entièrement ce problème en utilisant le formalisme spinoriel développé par Crumeyrolle [3]. Nous obtenons ainsi toutes les solutions du problème, et nous complétons les résultats de Lawrynowicz et Rembielinsky. Nous trouvons, en effet, des formes bilinéaires non obtenues dans leurs travaux. Nous démontrons aussi l'existence de paires de Hurwitz dans le cas $p-q=5 \bmod 8$ et $p+q=3$ ou $7 \bmod 8$ (Λ antisymétrique) ce qui n' avait pas été obtenu par Lawrynowicz et Rembielinski.

De plus, ce formalisme permet d' une part, de mettre en évidence les raisons géométriques qui gouvernent les solutions du problème, et d' autre part, de généraliser aisément la construction de paires de Hurwitz pseudo-euclidiennes au dessus de variétés différentiables munies de structures spinorielles adéquates.

2. Paires de Hurwitz pseudo-euclidiennes, algèbres de Clifford et espaces spinoriels

On considère une paire de Hurwitz pseudo-euclidienne $\{(F, Q_0), (\mathscr{S}, \Lambda)\}$, selon la définition donnée au paragraphe 1.

Remarquons que les conditions (i) et (ii) font que $Q_0(\varepsilon_0) = 1$.

On suppose directement que $m \geqslant 2$, le cas $m = 1$ étant trivial.

On note g_0, la forme bilinéaire symétrique non dégénérée associée à Q_0 sur F:

$$g_0(x, y) = \tfrac{1}{2}\{Q_0(x+y) - Q_0(x) - Q_0(y)\}.$$

Selon un résultat classique, on peut décomposer l'espace F en:

$$F = \mathbb{R}\varepsilon_0 \oplus E \qquad \text{et} \qquad E = (\varepsilon_0)^{\perp}.$$

E est l'orthogonal dans F, relativement *à* Q_0, du sous-espace engendré par l'élément ε_0.

On sait alors que $\dim_{\mathbb{R}} E = m - 1$ et que la forme quadratique $\hat{Q}_0 = Q_0/E$ est encore non dégénérée sur E.

Proposition 2.1 (Proposition fondamentale). Soit $\{(F, Q_0), (\mathcal{S}, \Lambda)\}$ une paire de Hurwitz pseudo-euclidienne et soit la décomposition de F: $F = \mathbb{R}\varepsilon_0 \oplus E$ avec $E = (\varepsilon_0)^{\perp}$.
Alors on a, pour tout élément x de E

$$\Lambda(\varphi, x\psi) + \Lambda(x\varphi, \psi) = 0 \qquad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}.$$

Démonstration. Calculons $\Lambda((\varepsilon_0 + x)\varphi, (\varepsilon_0 + x)\varphi)$ en utilisant la propriété (ii): d'une part:

$$\Lambda((\varepsilon_0 + x)\varphi, (\varepsilon_0 + x)\psi) = (1 + Q_0(x))\Lambda(\varphi, \psi)$$

d'autre part:

$$\Lambda((\varepsilon_0 + x)\varphi, (\varepsilon_0 + x)\psi = \Lambda(\varphi, \psi) + Q_0(x)\Lambda(\varphi, \psi) + \Lambda(\varphi, x\psi) + \Lambda(x\varphi, \psi)$$

d'où le résultat.

Pour tout x de E, on désigne par L_x, l'endomorphisme de $\mathcal{S}$ défini par: $L_x(\varphi) = x\varphi = f(x, \varphi)$.
On a donc, en utilisant la proposition 2.1:

$$\Lambda(L_x\varphi, L_x\varphi) = -\Lambda(L_x^2\varphi, \psi) \qquad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}$$

$$\Lambda(L_x\varphi, L_x\varphi) = Q_0(x)\Lambda(\varphi, \psi).$$

Proposition 2.2. Pour tout élément x de E, on a:

$$L_x^2 = -Q_0(x)\,\mathrm{id}$$

où id est l'application identique de $\mathcal{S}$. Notons que $L_{\varepsilon_0} = \mathrm{id}$.

On considère alors la forme quadratique non dégénérée Q sur E, définie par: $Q(x) = -Q_0(x)\ \forall x \in E$.
On note (p, q) la signature de Q, on a:

$$(p, q) = (\sigma, \rho - 1)$$

(ρ, σ) étant la signature de Q_0 sur F.
Soit $C(Q) = C(E, Q)$ l'algèbre de Clifford construite sur l'espace pseudo-euclidien (E, Q). $C(Q) = \otimes E/N(Q)$, $N(Q)$ étant l'idéal de $\otimes E$, engendré par les éléments $\{x \otimes x - Q(x), x \in E\}$.
Soit $\mathscr{E}$ l'espace vectoriel des $\{L_x, x \in E\}$ et $\mathscr{A}$ l'algèbre des endomorphismes de $\mathcal{S}$, engendré par $\mathscr{E}$.

Lemme 2.3. L'application $u: \left\{\begin{smallmatrix} E \to \mathscr{E} \\ x \to L_x \end{smallmatrix}\right.$ est une ismorphisme linéaire, tel que $(u(x))^2 = Q(x)\,\mathrm{id}$.
u est surjectif par la définition même de $\mathscr{E}$.
u est injectif car si $u(x) = 0$, alors

$$\Lambda(L_x\varphi, L_y\psi) + \Lambda(L_y\varphi, L_x\psi) = 0 \qquad \forall y \in E \text{ et } \forall \varphi, \psi \in S$$

or $\Lambda(L_x\varphi, L_y\psi) + \Lambda(L_y\varphi, L_x\psi) = -2g_0(x, y)\Lambda(\varphi, \psi)$.

Soit B la forme bilinéaire non dégénérée associée à Q sur E, on obtient: $B(x, y) = 0\ \forall y \in E$ d'où $x = 0$.

Proposition 2.4. D'après la propriété universelle de l'algèbre de Clifford $C(Q)$ l'isomorphisme linéaire u s'étend à un isomorphisme d'algèbres $\bar{u}$: $C(Q) \to \mathscr{A}$ suivant le diagramme:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "h"'] & & \mathscr{A} \\ & C(Q) \arrow[ur, "\bar{u}"'] & \end{tikzcd}$$

Notons que l'isomorphisme $\bar{u}$ permet d'identifier les espaces E de $\mathscr{E}$, ainsi que l'élément unité 1 de $C(Q)$ avec ε_0. L'espace F peut être alors identifié au sous-espace $\mathbb{R} \oplus E$ de $C(Q)$.

L'isomorphisme $\bar{u}$ permet de construire une représentation irréductible de l'algèbre de Clifford $C(Q)$ dans l'espace $\mathscr{S}$: $\mathscr{S}$ est donc un *espace spinoriel.* Soit (p, q) la signature de Q sur E, $C(Q) = C(p, q)$ est l'algèbre de Clifford associée, on obtient, selon un résultat classique:

si $\dim_{\mathbb{R}} E = n$ avec $n = 2r$ ou $n = 2r+1$ alors:

pour $p - q \equiv 0, 2 \bmod 8$	$C(Q) \simeq \mathbb{M}(2^r, \mathbb{R})$	$\dim_{\mathbb{R}} \mathscr{S} = 2^r$
pour $p - q \equiv 4, 6 \bmod 8$	$C(Q) \simeq \mathbb{M}(2^{r-1}, \mathbb{H})$	$\dim_{\mathbb{R}} \mathscr{S} = 2^{r+1}$
pour $p - q \equiv 1 \bmod 8$	$C(Q) \simeq \mathbb{M}(2^r, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{M}(2^r, \mathbb{R})$	$\dim_{\mathbb{R}} \mathscr{S} = 2^r$
pour $p - q \equiv 3, 5 \bmod 8$	$C(Q) \simeq \mathbb{M}(2^r, \mathbb{C})$	$\dim_{\mathbb{R}} \mathscr{S} = 2^{r+1}$
pour $p - q \equiv 7 \bmod 8$	$C(Q) \simeq \mathbb{M}(2^{r-1}, \mathbb{H}) \oplus \mathbb{M}(2^{r-1}, \mathbb{H})$	$\dim_{\mathbb{R}} \mathscr{S} = 2^{r+1}$.

Soit Q_0 sur F, de signature (p, σ) avec $(\rho, \sigma) = (q+1, p)$ et soit $\dim_{\mathbb{R}} F = m = n+1$, on a le:

Théorème 2.5. Si $\{(F, Q_0), (\mathscr{S}, \Lambda)\}$ est une paire de Hurwitz pseudo-euclidienne, de dimension (m, s) avec $m = n+1$ et $n = 2r$ ou $n = 2r+1$ alors

$$s = 2^r \text{ lorsque } \rho - \sigma \equiv 0, 1, 7 \bmod 8$$
$$s = 2^{r+1} \text{ lorsque } \rho - \sigma \equiv 2, 3, 4, 5, 6 \bmod 8.$$

Nous considérons maintenant un groupe G opérant à la fois sur les espaces F et $\mathscr{S}$. On suppose, bien sur, que l'action de G sur F et $\mathscr{S}$ est compatible avec leur structure d'espace vectoriel.

Si g est un élément de G, on désigne par:

$$p(g) : x \in F \to p(g) \cdot x \in F, \text{ l'action de G sur } F \text{ et par:}$$
$$\rho(g) : \psi \in \mathscr{S} \to \rho(g) \cdot \psi \in \mathscr{S}, \text{ l'action de G sur } \mathscr{S}.$$

On a la:

Proposition 2.6. Si l'action de G sur les espaces F et $\mathscr{S}$ vérifie la propriété d'équivariance:

(E) $\rho(g) \cdot (x\psi) = (p(g) \cdot x)(\rho(g) \cdot \psi) \qquad \forall g \in \mathrm{G}\ \forall x \in F\ \forall \psi \in \sigma\varsigma\phi\varsigma\nabla\mathscr{S}$

alors:

(a) ε_0 est invariant par G: $\forall g \in \mathrm{G}, p(g)\varepsilon_0 = \varepsilon_0$

(b) G respecte la condition de Hurwitz pseudo-euclidienne:

$$\Lambda(\rho(g)(x\varphi), p(g)(x\psi)) = Q_0(p(g)x)\Lambda(\rho(g)\varphi, \rho(g)\psi).$$

La démonstration est immédiate.

Remarques

(a) Cette proposition est importante pour la construction de fibrations en paires de Hurwitz pseudo-euclidiennes.

(b) Nous verrons qu'il existe de tels groupes G, agissant sur F et $\mathcal{S}$ et vérifiant la propriété d'équivariance (E).

Un exemple fondamental sera obtenu en considérant l'action du groupe de Clifford G de l'algèbre $C(Q)$, sur les espaces F et $\mathcal{S}$.

G est le groupe de Clifford de $C(Q)$:

$$\mathrm{G} = \{g \in C^*(Q) : gxg^{-1} \in E \ \forall x \in E\}.$$

G opère naturellement sur E par $p(g)x = gxg^{-1}$. On peut étendre cette action à F en posant $p(g)\varepsilon_0 = \varepsilon_0$.

D'autre part, on considère l'espace spinoriel $\mathcal{S}$ comme un idéal à gauche de l'algèbre $C(Q)$.

G opère sur $\mathcal{S}$ par $\rho(g)\psi = g\psi$, $\forall \psi \in \mathcal{S}$ où $g\psi$ représente le produit à gauche dans $C(Q)$.

Il est immédiat de vérifier que G vérifie la propriété (E).

3. Rappels sur les formes bilinéaires et hermitiennes dans les espaces spinoriels

Les notations utilisées pout la suite sont celles de Crumeyrolle [3].

Les résultats sont donnés ici sans démonstrations. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter [1, 3, 10].

E est un espace vectoriel réel, de dimension paire $n = 2r$, muni d'une forme quadratique non dégénérée, pseudo-euclidienne, de signature quelconque (p, q).

On désigne par $C(Q)$ l'algèbre de Clifford réelle associée à (E, Q).

On note E' l'espace complexifié de E, Q' la forme quadratique complexifiée, et $C(Q')$ l'algèbre de Clifford associée à (E', Q').

On rappelle que $C(Q')$ est isomorphe à l'algèbre complexifiée $C(Q)'$.

Q' est neutre et on peut construire une décomposition de Witt

$$E' = F \oplus F'$$

avec la base de Witt correspondante:

$$\{x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r\}.$$

On note alors par $f = y_1 \ldots y_r$ le r-vecteur isotrope associé au sous-espace totalement isotrope maximal F'.

$S' = C(Q')f$ est l'espace spinoriel complexe.

Dans la suite, on considère l'antiautomorphisme de $C(Q)$ ou $C(Q')$ $\tilde{\beta} = \beta \circ \alpha$. On rappelle que $\tilde{\beta}_{/E} = -\mathrm{id}$ et que $\tilde{\beta}(f) = \tilde{\varepsilon} f$ avec $\tilde{\varepsilon} = (-1)^{r(r+1)/2}$.

3.1. *La forme $\mathbb{C}$-bilinéaire $\tilde{\mathscr{B}}$*

On sait définir une forme $\mathbb{C}$-bilinéaire $\tilde{\mathscr{B}}$, non-dégénérée sur S' en posant:

$\forall uf, vf \in S'$:

$$\tilde{\mathscr{B}}(uf, vf)f = \tilde{\beta}(uf)vf.$$

On a les propriétés suivantes:

(a) $\tilde{\mathscr{B}}(uf, vf) = \varepsilon\tilde{\mathscr{B}}(vf, uf)$

(b) si $r \equiv 0{,}3 \bmod 4$ $\tilde{\mathscr{B}}$ est symétrique et neutre, si $r \equiv 1, 2 \bmod 4$ $\tilde{\mathscr{B}}$ est antisymétrique.

(c) $\tilde{\mathscr{B}}(xuf, vf) + \tilde{\mathscr{B}}(uf, xvf) = 0 \ \forall x \in E'$

(d) $\tilde{\mathscr{B}}(xuf, xvf) = -Q'(x)\tilde{\mathscr{B}}(uf, vf) \ \forall x \in E'$.

Proposition. Toute forme $\mathbb{C}$-bilinéaire non dégénérée $\mathscr{B}_1$ sur S', vérifiant la propriété:

$$\mathscr{B}_1(xuf, vf) + \mathscr{B}_1(uf, xvf) = 0 \ \forall x \in E' \ \forall uf, vf \in S'$$

est de la forme:

$$\mathscr{B}_1 = \lambda\tilde{\mathscr{B}} \qquad \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

3.2. La conjugaison de charge $\mathscr{C}$ [4]

Soit Pin Q' le sous-groupe du groupe de Clifford G′, constitué des éléments g tels que $N(g) = \pm 1$, N étant la norme spinorielle.

Il existe un élément γ de Pin Q', tel que $\bar{f} = \gamma f \gamma^{-1}$, $\bar{f}$ désignant la conjugaison complexe usuelle.

On rappelle que $\gamma f = \bar{f}\gamma$ est un spineur pur, et on peut définir la conjugaison de charge par la suite d'applications:

$$uf \to \overline{uf} \to \overline{uf}\gamma = \bar{u}\gamma f.$$

On pose, par définition:

$$\mathscr{C}(uf) = e^{i\theta}\bar{u}\gamma f \qquad \theta \text{ étant un réel arbitraire.}$$

On a les propriétés suivantes:

(a) $\mathscr{C}^2 = \varepsilon'$ id avec $\varepsilon' = (-1)^{[(p-r)(p-r-1)]/2}$.

On a $C^2 = \mathrm{id}$ lorsque $p - q \equiv 0, 2 \bmod 8$ (cas réel)

$C^2 = -\mathrm{id}$ lorsque $p - q \equiv 4, 6 \bmod 8$ (cas quaternionique)

(b) $\mathscr{C}(xuf) = x\mathscr{C}(uf) \ \forall x \in E$

(c) $\mathscr{C}(guf) = g\mathscr{C}(uf) \ \forall g \in$ G groupe de Clifford réel.

3.3. La forme hermitienne $\tilde{\mathscr{H}}$

Il est possible de définir sur S', une forme sesquilinéaire hermitienne non dégénérée $\tilde{\mathscr{H}}$ vérifiant:

$$\tilde{\mathscr{H}}(\mathscr{C}(uf), vf) = \lambda\tilde{\mathscr{B}}(uf, vf) \qquad \lambda \in \mathbb{C}^*$$

où, de manière équivalente:

$$\tilde{\mathscr{H}}(uf, vf) = \lambda'\tilde{\mathscr{B}}(\mathscr{C}(uf), vf) \qquad \lambda' \in \mathbb{C}^*.$$

On montre que l'on a alors:

$$a\tilde{\mathscr{H}}(uf, vf)\gamma f = \tilde{\beta}(\overline{uf})vf \qquad a \in \mathbb{C}^*$$

et on peut choisir $a = e^{i\theta}$ de manière que $\tilde{\mathscr{H}}$ soit hermitienne.

On a les propriétés suivantes:
(*a*) $\tilde{\mathscr{H}}(\mathscr{C}(uf), vf) = \bar{\varepsilon}\tilde{\mathscr{H}}(\mathscr{C}(vf), uf)$
(*b*) $\tilde{\mathscr{H}}(\mathscr{C}(uf), \mathscr{C}(vf)) = \bar{\varepsilon}\varepsilon'\tilde{\mathscr{H}}(vf, uf)$
(*c*) $\tilde{\mathscr{H}}(xuf, vf) + \tilde{\mathscr{H}}(uf, xvf) = 0\ \forall x \in E$
(*d*) $\tilde{\mathscr{H}}(xuf, xvf) = -Q(x)\tilde{\mathscr{H}}(uf, vf)\ \forall x \in E$
(*e*) $\tilde{\mathscr{H}}(guf, gvf) = N(g)\tilde{\mathscr{H}}(uf, vf)\ \forall g \in G^{+}$ groupe de Clifford spécial
(*f*) $\tilde{\mathscr{H}}$ est donc invariante par l'action du groupe de Clifford spécial réduit réel G_0^{+}.

Proposition. Si $\mathscr{H}_1$ est une forme sesquilinéaire, hermitienne, non dégénérée sur S', vérifiant

$$\mathscr{H}_1(xuf, vf) + \mathscr{H}_1(uf, xvf) = 0 \qquad \forall x \in E$$

alors $\mathscr{H}_1 = k\tilde{\mathscr{H}}$, $k \in \mathbb{R}$.

On rappelle enfin que si Q est défine négative, alors $\tilde{\mathscr{H}}$ est définie (positive ou négative) et si Q est non définie négative, alors $\tilde{\mathscr{H}}$ est neutre.

4. Construction effective des paires de Hurwitz pseudo-euclidiennes dans les algèbres de Clifford

Nous voulons, dans cette partie, construire, quand c'est possible, les paires de Hurwitz pseudo-euclidiennes $\{(F, Q_0), (\mathscr{S}, \Lambda)\}$ dans l'algèbre de Clifford $C(Q) = C(E, Q)$, où Q est une forme quadratique non dégénérée pseudo-euclidienne, de signature quelconque (p, q); $p + q = n$.

Soit (E, Q) un espace réel pseudo-euclidien de dimension n et Q ayant pour signature (p, q) avec $p + q = n$.

On désigne par $C(Q)$ l'algèbre de Clifford associée.

Utilisant les résultats du paragraphe 2, on veut construire une paire de Hurwitz $\{(F, Q_0), (\mathscr{S}, \Lambda)\}$ dans $C(Q)$ avec $F = \mathbb{R} \oplus E$, $\varepsilon_0 = 1$, et $Q_0(\varepsilon_0) = 1$, $Q_0(x) = -Q(x)$ et $g_0(1, x) = 0\ \forall x \in E$, où g_0 désigne la forme bilinéaire non dégénérée associée à Q_0.

$\mathscr{S}$ est un espace spinoriel réel et la représentation de $C(Q)$ dans $\mathscr{S}$ permet de faire opérer F sur $\mathscr{S}$.

Le problème consiste alors à déterminer toutes les formes $\mathbb{R}$-bilinéaires Λ sur $\mathscr{S}$ vérifiant la condition:

$$\Lambda(z\varphi, z\psi) = Q_0(z)\Lambda(\varphi, \psi) \qquad \forall z \in F, \forall \varphi, \psi \in \mathscr{S}.$$

(A) *Etude du cas pair*
On suppose ici que $\dim_{\mathbb{R}} E = n = 2r$.
Nous énonçons tout d'abord un résultat fondamental.

Théorème 4.1. Soit $\{(F, Q_0), (\mathscr{S}, \Lambda)\}$ une paire de Hurwitz pseudo-euclidienne construite dans l'algèbre de Clifford $C(Q)$ comme ci-dessus.

La condition de Hurwitz pseudo-euclidienne:

$$\text{(H)} \qquad \Lambda(z\varphi, z\psi) = Q_0(z)\Lambda(\varphi, \psi) \qquad \forall z \in F, \forall \varphi, \psi \in \mathscr{S}$$

équivaut à la condition:

$$\text{(G)} \qquad \Lambda(x\varphi, \psi) + \Lambda(\varphi, x\psi) = 0 \qquad \forall x \in E, \forall \varphi, \psi \in \mathscr{S}.$$

En effet, la condition nécessaire a été démontrée au paragraphe 2. Et réciproquement, si on a:

$$\Lambda(x\varphi, \psi) + \Lambda(\varphi, x\psi) = 0 \qquad \forall x \in E, \forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}$$

on obient:

$$\Lambda(x\varphi, x\psi) = -\Lambda(x^2\varphi, \psi) \qquad \forall x \in E$$

$$\Lambda(x\varphi, x\psi) = -Q(x)\Lambda(\varphi, \psi) \qquad \forall x \in E$$

$$\Lambda(x\varphi, x\psi) = Q_0(x)\Lambda(\varphi, \psi) \qquad \forall x \in E$$

et si $z = \lambda\varepsilon_0 + x$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, on obtient immédiatement le résultat.

4.1. Le cas neutre: $p-q=0$

La forme quadratique Q étant neutre, on obtient directement dans le réel une base de Witt $\{x_i, y_j\} i, j = 1, \ldots, r$. On peut considérer le r-vecteur isotrope $f = y_1 \ldots y_r$ et l'espace spinoriel réel $S = C(Q)f$. Notons que $\dim_{\mathbb{R}} S = 2^r$.

Dans ce cas, toutes les formes $\mathbb{R}$-bilinéaires non dégénérées Λ sur S, vérifiant la condition (G) sont données par:

$$\Lambda = \lambda\tilde{\mathcal{B}} \qquad \lambda \in \mathbb{R}^*$$

où $\tilde{\mathcal{B}}$ est la forme bilinéaire définie par $\tilde{\beta}(uf)vf = \tilde{\mathcal{B}}(uf, vf)f$. (cf paragraphe 3).

On obtient toutes les paires de Hurwitz $\{(F, Q_0), (S, \Lambda)\}$ dans $C(Q)$, Q étant neutre, en considérant:

$$F = \mathbb{R}\varepsilon_0 \oplus E\,; \ \varepsilon_0 = 1.$$

Q_0 la forme quadratique non dégénérée sur F, définie par:

$$Q_0(\varepsilon_0) = 1$$

$$Q_0(x) = -Q(x)$$

$$g_0(1, x) = 0$$

pour tout x élément de E

$$S = C(Q)f \qquad \dim_{\mathbb{R}} S = 2^r$$

$$\Lambda = \lambda\tilde{\mathcal{B}} \qquad \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

Rappelons que Λ est symétrique pout $r \equiv 0, 3 \bmod 4$ et que Λ est antisymétrique pout $r \equiv 1, 2 \bmod 4$.

4.2. Le cas non-neutre: $p \neq q$

Nous rappelons le résultat classique:

Proposition 4.2.1

(a) cas quaternionique: si $p-q \equiv 4$ ou $6 \bmod 8$, l'algèbre de Clifford réelle $C(Q)$ est centrale, simple, isomorphe à l'algèbre matricielle $\mathbb{M}(2^{r-1}, \mathbb{H})$. Tous les espaces de représentations irréductibles de $C(Q)$ sont isomorphes et ont pout dimension 2^{r+1} sur $\mathbb{R}$.

(b) cas réel: si $p-q \equiv 0, 2 \bmod 8$, l'algèbre de Clifford réelle $C(Q)$ est centrale, simple, isomorphe à l'algèbre matricielle $\mathbb{M}(2^r, \mathbb{R})$. Tous les espaces de représentations irréductibles de $C(Q)$ sont isomorphes et ont pour dimension 2^r sur $\mathbb{R}$.

On rappelle succintement la manière de construire les espaces spinoriels dans les deux cas:

(a) cas quaternionique. On considère l'algèbre de Clifford complexe $C(Q')$ associée à l'espace complexifié (E', Q') comme au paragraphe 3.

Q' est neutre et on considère la base de Witt complexe $\{x_i, y_i\}$, ainsi que le r-vecteur isotrope $f = y_1 \dots y_r$.

$S' = C(Q')f$ est un espace spinoriel complexe de dimension 2^r sur $\mathbb{C}$. On obtient alors un espace spinoriel réel de représentation irréductible de $C(Q)$ en considérant l'espace réalifié $S = rS'$ de S'. Notons que $\dim_{\mathbb{R}} S = 2^{r+1}$.

(b) cas réel. Remarquons que l'on peut considérer la conjugaison de charge sur S' (cf paragraphe 3) et que, lorsque $p - q \equiv 0, 2 \bmod 8$ on a $\mathscr{C}^2 = \mathrm{id}$.

On peut alors décomposer l'espace réel $S = rS'$ en

$$S = S_1 \oplus S_2$$

avec $S_1 = (\mathrm{id} + \mathscr{C})(S)$ et $S_2 = (\mathrm{id} - \mathscr{C})(S)$.
S_1 est l'espace des spineurs φ_1 de S vérifiant $\mathscr{C}(\varphi_1) = \varphi_1$
S_2 est l'espace des spineurs φ_2 de S vérifiant $\mathscr{C}(\varphi_2) = -\varphi_2$.

Des spineurs tels que φ_1 ou φ_2 sont appelés des spineurs de Majorana et les espaces S_1 et S_2, des espaces de Majorana. (cf Crumeyrolle [4] ou Bugajska [1])

On a $\dim_{\mathbb{R}} S_1 = \dim_{\mathbb{R}} S_2 = 2^r$.

Les espaces S_1 et S_2 sont des sous-espaces réels de S, stable par l'action de E: ce sont des espaces de représentation irréductible de $C(Q)$.

4.3. Recherche des formes $\mathbb{R}$-bilinéaires Λ sur $\mathscr{S} = S$ ou S_l

4.3(a). Le cas quaternionique. On considère l'espace réalifié $S = rS'$ et soit Λ une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire sur S, vérifiant la relation fondamentale:

$$\Lambda(x\varphi, \psi) + \Lambda(\varphi, x\psi) = 0 \qquad \forall x \in E, \forall \varphi, \psi \in S.$$

Proposition 4.3.1. A toute forme $\mathbb{R}$-bilinéaire Λ sur S, correspond de manière injective une forme $\mathbb{C}$-bilinéaire $\Lambda^{\mathbb{C}}$ sur l'espace complexifié $S^{\mathbb{C}}$. Plus précisément, on a: Si $z, z' \in S^{\mathbb{C}}$ avec $z = x + \mathrm{i}y$, $z' = x' + \mathrm{i}y'$; $x, x', y, y' \in S$

$$\Lambda^{\mathbb{C}}(z, z') = \Lambda(x, x') - \Lambda(y, y') + \mathrm{i}(\Lambda(x, y') + \Lambda(y, x'))$$

et on voit que l'on retrouve Λ en considérant la partie réelle de $\Lambda^{\mathbb{C}}$ restreinte à S, CAD en annulant y ou y'.

Utilisant le fait que $S = rS'$ et que $S^{\mathbb{C}} \simeq S' \oplus 'S'$ où $'S'$ désigne la $2^{\text{ème}}$ structure d'espace vectoriel complexe sur S': $\lambda \in \mathbb{C}(\lambda, \varphi) \to \bar{\lambda}\varphi = \varphi.\lambda$.

On a alors:

$$S^{\mathbb{C}} \times S^{\mathbb{C}} \simeq (S' \times S') \oplus ('S' \times 'S') \oplus ('S' \times S') \oplus (S' \times 'S')$$

et la forme $\mathbb{C}$-bilinéaire $\Lambda^{\mathbb{C}}$ induit des formes $\mathbb{C}$-bilinéaires sur chacun des espaces $S' \times S'$; $'S' \times 'S'$; $'S' \times S'$; $S' \times 'S'$.

Notons que toute forme $\mathbb{C}$-bilinéaire $\mathscr{B}_1 : S' \times S' \to \mathbb{C}$ correspond biunivoquement à une forme $\mathbb{C}$-bilinéaire $\bar{\mathscr{B}}_1 : 'S' \times 'S' \to \mathbb{C}$ et que toute forme $\mathbb{C}$-bilinéaire de $'S' \times S' \to \mathbb{C}$ correspond biunivoquement à une forme $\mathbb{C}$-bilinéaire de $S' \times 'S' \to \mathbb{C}$ et à une forme sesquilinéaire $\mathscr{H}_1 : S' \times S' \to \mathbb{C}$.

Proposition 4.3.2. On montre facilement que:

(a) si Λ est symétrique sur S, alors $\mathscr{B}_1$ est symétrique sur S' et $\mathscr{H}_1$ est hermitienne sur S';

(b) si Λ est antisymétrique sur S, alors $\mathscr{B}_1$ est antisymétrique sur S' et $\mathscr{H}_1$ est antihermitienne sur S'.

Proposition 4.3.3. Il est immédiat que:

les formes sesquilinéaires hermitiennes $\mathscr{H}_1$ et $\mathbb{C}$-bilinéaire $\mathscr{B}_1$ sur S' induites par $\Lambda^{\mathbb{C}}$ vérifient les propriétés:

$$\mathscr{H}_1(xuf, vf) = -\mathscr{H}_1(uf, \bar{x}vf) \qquad \forall x \in E'$$

$$\mathscr{B}_1(xuf, vf) = -\mathscr{B}_1(uf, xvf) \qquad \forall x \in E'.$$

Utilisant les résultats rappelés au paragraphe 3, on en déduit que $\mathscr{B}_1 = \lambda\tilde{\mathscr{B}}$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$; $\mathscr{H}_1 = k\tilde{\mathscr{H}}$, $k \in \mathbb{R}^*$ lorsque Λ est symétrique et $\mathscr{H}_1 = \mathrm{i}k\tilde{\mathscr{H}}k \in \mathbb{R}^*$ lorsque Λ est antisymétrique.

Finalement, on obtient que $\Lambda^{\mathbb{C}}$ peut s'écrire sous la forme générale $\Lambda^{\mathbb{C}} : S' \times S' \to \mathbb{C}$ avec:

$$\Lambda^{\mathbb{C}} \equiv \lambda\tilde{\mathscr{B}} + \mu\bar{\tilde{\mathscr{B}}} + k\tilde{\mathscr{H}} + k'\bar{\tilde{\mathscr{H}}} \qquad \text{dans le cas symétrique}$$

ou

$$\Lambda^{\mathbb{C}} \equiv \lambda\tilde{\mathscr{B}} + \mu\bar{\tilde{\mathscr{B}}} + \mathrm{i}k\tilde{\mathscr{H}} + \mathrm{i}k\bar{\tilde{\mathscr{H}}} \qquad \text{dans le cas antisymétrique}$$

λ, $\mu \in \mathbb{C}$, pouvant être éventuellement nuls; k, $k' \in \mathbb{R}^*$.

Considérant alors la partie réelle de $\Lambda^{\mathbb{C}}$, restreinte à S, on obtient:

Théorème 4.3.4. (cas symétrique). Si Λ est une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire symétrique sur S, vérifiant

$$\Lambda(xuf, vf) + \Lambda(uf, xvf) = 0 \qquad \forall x \in E.$$

Alors:

$$\text{si } r \equiv 0, 3 \bmod 4 \qquad \Lambda \equiv a \,\mathrm{Re}\, \tilde{\mathscr{B}} + b \,\mathrm{Im}\, \tilde{\mathscr{B}} + c \,\mathrm{Re}\, \tilde{\mathscr{H}} \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{si } r \equiv 1, 2 \bmod 4 \qquad \Lambda = c \,\mathrm{Re}\, \tilde{\mathscr{H}} \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Théorème 4.3.5. (cas antisymétrique). Si Λ est une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire antisymétrique sur S, vérifiant

$$\Lambda(xuf, vf) + \Lambda(uf, xvf) = 0 \qquad \forall x \in E.$$

Alors:

$$\text{si } r \equiv 0, 3 \bmod 4 \qquad \Lambda = c \,\mathrm{Im}\, \tilde{\mathscr{H}} \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{si } r \equiv 1, 2 \bmod 4 \qquad \Lambda = a \,\mathrm{Re}\, \tilde{\mathscr{B}} + b \,\mathrm{Im}\, \tilde{\mathscr{B}} + c \,\mathrm{Im}\, \tilde{\mathscr{H}} \qquad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Nous terminons l'étude du cas quaternionique par un résultat sur la non-dégénérescence de la forme Λ ainsi déterminée.

Soient $\tilde{\mathscr{H}}$ et $\tilde{\mathscr{B}}$ les formes respectivement hermitienne et $\mathbb{C}$-bilinéaire sur S' (cf. paragraphe 3).

On pose $\alpha = \operatorname{Re} \tilde{\mathscr{H}}$, $\sigma = \operatorname{Im} \tilde{\mathscr{H}}$, $\omega = \operatorname{Re} \tilde{\mathscr{B}}$, $\eta = \operatorname{Im} \tilde{\mathscr{B}}$ sur l'espace réalifié $S = rS'$.

Considérant une base $\{x_{i_1} \dots x_{i_k} f, ix_{i_1} \dots x_{i_k} f\} 1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant r$ de S, on montre par un calcul direct:

Proposition 4.3.6. Les formes α, σ, ω et η sont linéairement indépendantes sur S.

Théorème 4.3.7. Soit Λ une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire sur $S = rS'$, vérifiant la condition $\Lambda(xuf, vf) + \Lambda(uf, xvf) = 0, \forall x \in E, \forall uf, vf \in S$.

Si Λ est dégénérée sur S, alors elle est identiquement nulle sur S.

Démonstration. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base pseudo-orthonormée de E, le choix d'une telle base permet d'identifier linéairement $C(Q)$ et $\Lambda(E)$. $C(Q)$ est linéairement engendré par la famille $\{1, e_{i_1} \dots e_{i_l}, 1 \leqslant i_1 < \dots < i_l \leqslant n\}$.

Si Λ est dégénérée sur S, il existe un spineur non nul φ tel que

$$\Lambda(\varphi, \psi') = 0 \qquad \forall \psi' \in S$$

d'où

$$\Lambda(e_i\varphi, \psi') = -\Lambda(\varphi, e_i\psi') = 0 \qquad \forall \psi' \in S$$

en itérant $\Lambda(u\varphi, \psi') = 0, \forall u \in C(Q), \forall \psi' \in S$. or $C(Q) \simeq \mathbb{M}(2^{r'}, \mathbb{H})$, on en déduit que $C(Q)$ opère transitivement sur un espace quaternionique de dimension 2^{r-1} sur $\mathbb{H}$, donc aussi sur S.

On obtient donc $\Lambda(\psi, \psi') = 0, \forall \psi, \psi' \in S$.

Corollaire 4.3.8. Si Λ est non nulle sur S, alors elle est non dégénérée sur S.

On peut finalement énoncer le:

Théorème 4.3.9. (cas quaternionique: $p - q \equiv 4, 6 \bmod 8$). Soit $C(Q) = C(E, Q)$ l'algèbre de Clifford réelle construite avec la forme quadratique Q de signature (p, q):

On obtient toutes les paires de Hurwitz pseudo-euclidiennes $\{(F, Q_0), (S, \Lambda)\}$ en considérant:

- $F = \mathbb{R} \oplus E$, $\varepsilon_0 = 1$, $\dim_{\mathbb{R}} F = m = n + 1 = 2r + 1$
- Q_0 forme quadratique non dégénérée sur F avec:

$$Q_0(\varepsilon_0) = 1$$

$$Q_0(x) = -Q(x) \qquad \forall x \in E$$

$$g_0(\varepsilon_0, x) = 0 \qquad \forall x \in E$$

où g_0 est la forme bilinéaire associée à Q_0.

- $S = rS'$ espace spinoriel réel de dimension 2^{r+1} sur $\mathbb{R}$.
- Λ forme bilinéaire non dégénérée sur S, donnée par:

cas symétrique

si $r \equiv 0, 3 \bmod 4$	$\Lambda = a\omega + b\eta + c\alpha$	$(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$
Si $r \equiv 1, 2 \bmod 4$	$\Lambda = c\alpha$	$c \neq 0$

cas antisymétrique

$$\text{si } r \equiv 0,3 \bmod 4 \qquad \Lambda = c\sigma \qquad c \neq 0$$

$$\text{si } r \equiv 1,2 \bmod 4 \qquad \Lambda = a\omega + b\eta + c\sigma \qquad (a, b, c) \neq (0,0,0)$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$.

4.3(b). Etude du cas réel ($p-q \equiv 0, 2 \bmod 8$). On considère la décomposition $S = rS' = S_1 \oplus S_2$ où S_1 et S_2 sont les espaces de Majorana construits avec la conjugaison de charge $\mathscr{C}$ (cf. paragraphe 3).

On prend ici, pour espace spinoriel réel, l'espace S_1:

$$S_1 = \{\varphi_1 \in S\colon \mathscr{C}\varphi_1 = \varphi_1\}.$$

Si Λ_1 est une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire, symétrique ou antisymétrique sur S_1, alors en utilisant la décomposition $S = S_1 \oplus \mathrm{i}S_1$ on peut étendre Λ_1 à une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire Λ sur S, vérifiant encore: $\Lambda(xuf, vf) + \Lambda(uf, xvf) = 0, \forall x \in E, \forall uf, vf \in S$ et $\Lambda_{/s_1} = \Lambda_1$.

On en déduit que Λ_1 sera construite avec les formes α, σ, ω, η *restreintes à* S_1.

Utilisant les relations entre $\tilde{\mathscr{H}}$, $\tilde{\mathscr{B}}$ et $\mathscr{C}$ énoncés au paragraphe 3, on obtient:

$$\tilde{\mathscr{B}}(\varphi_1, \psi_1) = \lambda \tilde{\mathscr{H}}(\varphi_1, \psi_1) \qquad \lambda \in \mathbb{C}^*, \varphi_1, \psi_1 \in S_1.$$

On déduit facilement que:

si $r \equiv 0, 3 \bmod 4$

$$\omega_{/s_1} = a\alpha_{/s_1} \qquad a \in \mathbb{R}$$

$$\eta_{/s_1} = b\alpha_{/s_1} \qquad b \in \mathbb{R}$$

$$\sigma_{/s_1} = 0$$

si $r \equiv 1, 2 \bmod 4$

$$\omega_{/s_1} = a\sigma_{/s_1} \qquad a \in \mathbb{R}$$

$$\eta_{/s_1} = b\sigma_{/s_1} \qquad b \in \mathbb{R}$$

$$\alpha_{/s_1} = 0.$$

Un raisonnement analogue au cas quaternionique permet d'énoncer le:

Théorème 4.3.10. Soit Λ_1 une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire sur S_1 vérifiant $\Lambda_1(xuf, vf) + \Lambda_1(uf, xvf) = 0, \forall x \in E, \forall uf, vf \in S_1$.

Si Λ_1 est dégénérée sur S_1, elle est identiquement nulle sur S_1. Rappelons que l'on a $p-q \equiv 0, 2 \bmod 8$ et $C(Q) \simeq \mathbb{M}(2^r, \mathbb{R})$.

Dans le cas réel, $p-q \equiv 0, 2 \bmod 8$, on obtient finalement le:

Théorème 4.3.11. (cas réel: $p-q \equiv 0, 2 \bmod 8$). On obtient toutes les paires de Hurwitz pseudo-euclidiennes $\{(F, Q_0), (S_1, \Lambda_1)\}$ dans $C(Q) = C(E, Q)$ en considérant:

- $F = \mathbb{R} \oplus E$, $\varepsilon_0 = 1$, $\dim_{\mathbb{R}} F = m = n+1 = 2r+1$
- Q_0 forme quadratique non-dégénérée sur F avec:

$$Q_0(\varepsilon_0) = 1$$

$$Q_0(x) = -Q(x) \qquad \forall x \in E$$

$$g_0(\varepsilon_0, x) = 0 \qquad \forall x \in E$$

où g_0 est la forme bilinéaire associée à Q_0.

- S_1 est l'espace des spineurs de Majorana, de dimension 2^r sur $\mathbb{R}$
- Λ_1 forme bilinéaire non dégénérée sur $\mathscr{S}_1$, donnée par:

$$\text{si } r \equiv 0, 3 \bmod 4 \qquad \Lambda_1 = a\omega_{/S_1} \qquad a \neq 0 \text{ (cas symétrique)}$$

$$\text{si } r \equiv 1, 2 \bmod 4 \qquad \Lambda_1 = a\omega_{/S_1} \qquad a \neq 0 \text{ (cas antisymétrique).}$$

(B) *Etude du cas impair*

On suppose ici que $\dim_{\mathbb{R}} E = n = 2r + 1$.

$C(Q) = C(E, Q)$ Q étant de signature (p, q).

(1) *Construction d'une représentation irréductible de C(Q) [2] ou [3].*

Soit $x_0 \in E$ tel que $Q(X_0) = \pm 1$, $E_1 = (x_0)^{\perp}$, $E = \mathbb{R}x_0 \oplus E_1$, $\dim_{\mathbb{R}} E_1 = n - 1 = 2r$, et $Q_{/E_1}$ est non dégénérée.

On pose $\forall y \in E_1$, $Q_1(y) = -Q(x_0)Q(y)$.

Selon un résultat classique, l'application $f: E_1 \to C^+(Q)$, telle que $f(y) = x_0 y$ se prolonge à un homorphisme d'algèbre $\bar{f}: C(Q_1) \to C^+(Q)$ et $\bar{f}$ est un isomorphisme d'algèbre.

Si S est un espace de représentation irréductible de $C(Q_1)$ c'est aussi un espace de représentation irréductible pout $C^+(Q)$. On notera alors $\rho^+: C^+(Q) \to \mathrm{End}(S)$ la représentation de $C^+(Q)$ dans S.

Pour construire l'espace S, on procède comme dans le cas pair:
soit E' l'espace complexifié de E la décomposition de Witt de E': $E' = F \oplus F' \oplus (x_0)$.
On a aussi la décomposition de Witt pour E_1': $E_1' = F \oplus F'$.

$S' = C(Q_1')f$ est l'espace spinoriel complexe usuel.

(p_1, q_1) désignant la signature de Q_1 sur E_1, on obtient:
si $p_1 - q \equiv 0, 2 \bmod 8$ on prend S_1 espace des spineurs de Majorana
si $p_1 - q_1 \equiv 4, 6 \bmod 8$ on prend $S = rS'$ espace réalifié.

Remarque. Quel que soit le choix de x_0 tel que $Q(x_0) = \pm 1$, on a:

$$p_1 - q_1 \equiv 0, 2 \bmod 8 \Leftrightarrow p - q \equiv -1, 1 \bmod 8$$

$$p_1 - q_1 \equiv 4, 6 \bmod 8 \Leftrightarrow p - q \equiv 3, 5 \bmod 8.$$

Proposition 4.3.12. Il est possible d'étendre de deux manières, et deux seulement la représentation spinorielle $\rho^+: C^+(Q') \to \mathrm{End}\, S'$ à une représentation irréductible $\rho: C(Q') \to \mathrm{End}\, S'$. (cf. Chevalley [1]).

Lemme. Il existe un élément impair z tel que $z^2 = 1$ et z appartient au centre Z' de $C(Q')$

si $p - q \equiv 1, 5 \bmod 8$ on prend $z = e_N$

si $p - q \equiv 3, 7 \bmod 8$ on prend $z = ie_N$

$e_N = e_1 \ldots e_n$, $(e_1, \ldots, e_n)$ base pseudo-orthonormée de E.

Soit $u \in C(Q')u$ s'écrit de manière unique $u = u_1 e_0 + u_2 z$ avec $u_1, u_2 \in C^+(Q')$, $e_0 = 1$.

Si $u = u^+ + u^-$ on prendra $u_1 = u^+$; $u_2 = u^- z$.

On définit alors les homomorphismes d'algèbre h et h' de $C(Q')$ dans $C^+(Q')$ par:

$$h(u) = u_1 + u_2 \qquad \text{et} \qquad h'(u) = u_1 - u_2.$$

Les applications $\rho = \rho^+ \circ h$ et $\rho' = \rho^+ \circ h'$ sont les deux seules représentations irréductibles, non équivalentes de $C(Q')$ dans S', qui étendent ρ^+.

Théorème 4.3.13. Si $p - q \equiv 3, 5, 7 \bmod 8$ la représentation ρ de $C(Q)$ dans S, où $S = rS'$ est l'espace réalifié, est irréductible.

On a $\dim_{\mathbb{R}} S = 2^{r+1}$.

Ceci provient de l'étude des dimensions. On rappelle que:

$$\text{si } p-q \equiv 3, 7 \bmod 8 \qquad C(Q) \simeq \mathbb{M}(2^r, \mathbb{C})$$

$$\text{si } p-q \equiv 5 \bmod 8 \qquad C(Q) \simeq \mathbb{M}(2^{r-1}, \mathbb{H}) \oplus \mathbb{M}(2^{r-1}, \mathbb{H})$$

Théorème 4.3.14. Si $p-q \equiv 1 \bmod 8$, on obtient une représentation irréductible ρ de $C(Q)$ dans S_1 où S_1 est l'espace des spineurs de Majorana $\dim_{\mathbb{R}} S_1 = 2^r$.

Notons que $p-q \equiv 1 \bmod 8 \Leftrightarrow p_1 - q_1 \equiv 0, 2 \bmod 8$ et $\mathscr{C}_1^2 = \mathrm{id}$. si $u \in C(Q)$ alors $h(u) = u^+ e_0 + u^- e_N \in C^+(Q)$ et S_1 est stable pour la représentation ρ.

L'irréductibilité provient des dimensions.

(2) *Construction des paires de Hurwitz $\{(F, Q_0), (S, \Lambda)\}$*

Remarque préliminaire. Soit $\tilde{\beta} = \beta \circ \alpha$ l'antiautomorphisme de $C(Q')$ on note encore $\tilde{\beta}$ sa restriction *à* $C^+(Q')$, on $a : \tilde{\beta} = \beta$ sur $C^+(Q')$. On note aussi $\tilde{\beta}$ pour $\tilde{\beta}_1$ sur $C(Q'_1)$.

Si $\bar{f}$ est l'isomorphisme d'algèbres de $C(Q'_1)$ sur $C^+(Q')$ on a $\bar{f} \circ \tilde{\beta} = \tilde{\beta} \circ \bar{f}$.

On considère toujours les formes hermitienne et $\mathbb{C}$-bilinéaire $\tilde{\mathscr{H}}_1$ et $\tilde{\mathscr{B}}_1$ construite sur l'espace spinoriel complexe $S' = C(Q'_1)f$ ainsi que les formes $\mathbb{R}$-bilinéaires $\alpha = \operatorname{Re} \tilde{\mathscr{H}}$, $\sigma = \operatorname{Im} \tilde{\mathscr{H}}$, $\omega = \operatorname{Re} \tilde{\mathscr{B}}$, $\eta = \operatorname{Im} \tilde{\mathscr{B}}$, sur $S = rS'$.

Lemme 4.4.14. Soit Λ une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire sur S, vérifiant

$$\Lambda(\rho(x)uf, vf) + \Lambda(uf, \rho(x)vf) = 0 \qquad \forall x \in E, \forall uf, vf \in S$$

alors Λ vérifie la relation

$$\Lambda(yuf, vf) + \Lambda(uf, yvf) = 0 \qquad \forall y \in E_1, \forall uf, vf \in S.$$

Preuve. La relation $\Lambda(\rho(x)uf, vf) = -\Lambda(uf, \rho(x)vf), \forall x \in E$, entraine que $\Lambda(\rho(w)uf, vf) = \Lambda(uf, \rho(\tilde{\beta}(w))vf), \forall w \in C(Q)$ et aussi pour $w^+ \in C^+(Q)$. Posant $w^+ = x_0 y$ avec $y \in E_1$, on obtient:

$$\Lambda(\rho^+(x_0 y)uf, vf) = \Lambda(uf, \rho^+(\tilde{\beta}(x_0 y))vf) \qquad \forall y \in E_1$$

$$\Lambda(yuf, vf) = \Lambda(uf, \tilde{\beta}(y)vf) \qquad \forall y \in E_1$$

$$\Lambda(yuf, vf) = -\Lambda(uf, yvf) \qquad \forall y \in E_1.$$

Conséquence. On déduit de ce lemme, et de l'étude du cas pair, que Λ est nécessairement une combinaison linéaire à coefficients réels des formes ω, η, α ou σ.

Nous devons cependant étudier si ces formes vérifient encore la relation fondamentale

$$\Lambda(\rho(x)uf, vf) + \Lambda(uf, \rho(x)vf) = 0 \qquad \forall x \in E.$$

Proposition 4.3.15. La forme hermitienne non-dégénérée $\tilde{\mathscr{H}}$ sur l'espace spinoriel complexe $S' = C(Q'_1)f$ vérifie la relation fondamentale

$$\tilde{\mathscr{H}}(\rho(x)uf, vf) + \tilde{\mathscr{H}}(uf, \rho(x)vf) = 0 \qquad \forall x \in E, \forall uf, vf \in S'$$

si et seulement si on a:

$$p-q \equiv 1, 5 \bmod 8 \qquad \text{et} \qquad r \equiv 1 \bmod 2$$

ou

$$p-q \equiv 3, 7 \bmod 8 \qquad \text{et} \qquad r \equiv 0 \bmod 2.$$

Preuve. On doit avoir $\tilde{\mathscr{H}}(\rho(x)uf, vf) = \tilde{\mathscr{H}}(uf, \rho(\tilde{\beta}(\bar{x}))vf)$ soit

$$\tilde{\mathscr{H}}(xzuf, vf) = \tilde{\mathscr{H}}(uf, \tilde{\beta}(\overline{xz})vf)$$

avec

$$\tilde{\beta}(\overline{xz}) = -x\tilde{\beta}(\bar{z})$$

ceci sera réalisé pour $\tilde{\beta}(\bar{z}) = -z$.

Soit $z = e_N$ et $r \equiv 1 \bmod 2$ ou bien $z = ie_N$ et $r \equiv 0 \bmod 2$.

Proposition 4.3.16. La forme $\mathbb{C}$-bilinéaire $\tilde{\mathscr{B}}$ sur S' vérifie la relation fondamentale $\tilde{\mathscr{B}}(\rho(x)uf, vf) + \tilde{\mathscr{B}}(uf, \rho(x)vf) = 0, \forall x \in E$, si et seulement si $r \equiv 1 \bmod 2$.

La démonstration est analogue à la précédente: on doit avoir $\tilde{\beta}(e_N) = e_N$ soit $r \equiv 1 \bmod 2$.

On peut alors énoncer le

Théorème 4.3.17. (cas impair: $n = 2r+1$). E étant un espace vectoriel réel, de dimension impaire $n = 2r+1$, muni d'une forme quadratique non-dégénérée Q, pseudo-euclidienne, de signature $(p, q), p+q = n$.

On obtient toutes les paires de Hurwitz pseudo-euclidiennes $\{(F, Q_0), (\mathscr{S}, \Lambda)\}$ dans l'algèbre de Clifford réelle $C(Q) = C(p, q)$ en considérant:

(1) le sous-espace vectoriel F de $C(Q)$, linéairement engendré par $\varepsilon_0 = 1$ et E;

(2) la forme quadratique non-dégénérée Q_0 sur F:

$$Q_0(\varepsilon_0) = 1$$
$$Q_0(x) = -Q(x) \qquad \forall x \in E$$
$$g_0(\varepsilon_0, x) = 0 \qquad \forall x \in E$$

où g_0 désigne la forme bilinéaire associée à Q_0.

(3)(*a*) *Lorsque $p - q \equiv 1 \bmod 8$ et $r \equiv 1 \bmod 2$:* $\mathscr{S} = S_1$, le sous-espace des spineurs de Majorana de $S' = C(Q_1')f$. $\dim_{\mathbb{R}} S_1 = 2^r$ et la forme $\mathbb{R}$-bilinéaire Λ sur S_1 donnée par:

si $r \equiv 3 \bmod 4$	$\Lambda = a\omega_{/S_1}$	$a \in \mathbb{R}^*$	(cas symétrique)
si $r \equiv 1 \bmod 4$	$\Lambda = a\omega_{/S_1}$	$a \in \mathbb{R}^*$	(cas antisymétrique).

(*b*) *Lorsque $p - q \equiv 5 \bmod 8$ et $r \equiv 1 \bmod 2$:* $S = rS'$ est l'espace réalifié de $S' = C(Q_i')f$, $\dim_{\mathbb{R}} S = 2^{r+1}$ et la forme Λ est donnée par:

si $r \equiv 3 \bmod 4$. $\Lambda = a\omega + b\eta + c\alpha$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ (case symétrique) ou bien $\Lambda = a\sigma$, $a \in \mathbb{R}^*$, (cas antisymétrique).

si $r \equiv 1 \bmod 4$. $\Lambda = a\alpha$, $a \in \mathbb{R}^*$, (cas symétrique) ou bien $\Lambda = a\omega + b\eta + c\sigma$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ (cas antisymétrique).

(*c*) *Lorsque $p - q \equiv 3$, $7 \bmod 8$.* $S = rS'$, espace réalifié de dimension 2^{r+1} sur $\mathbb{R}$, muni de la forme $\mathbb{R}$-bilinéaire Λ avec:

si $r \equiv 0 \bmod 2$. $\Lambda = a\alpha$, $a \in \mathbb{R}^*$, (cas symétrique). $\Lambda = a\sigma$, $a \in \mathbb{R}^*$, (cas antisymétrique).

si $r \equiv 1 \bmod 2$. $\Lambda = a\omega + b\eta$, $a, b \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq (0, 0)$ et

si $r \equiv 3 \bmod 4$, ω et η sont symétriques;

si $r \equiv 1 \bmod 4$, ω et η sont antisymétriques.

3.4. *Cas particulier: le problème de Hurwitz euclidien*

La paire de Hurwitz $\{(F, Q_0), (\mathcal{S}, \Lambda)\}$ est dite euclidienne si Q_0 est définie positive.

Dans ce cas la forme quadratique $Q = -Q_0$ sur l'espace $E = (\varepsilon_0)^{\perp}$ est définie négative, et on sait que la forme hermitienne $\tilde{\mathcal{H}}$ sur l'espace spinoriel $S' = C(Q')f$ est définie (positive ou négative).

Dans le cas pair, $\dim_{\mathbb{R}} E = n = 2r$, on prend $\Lambda = \operatorname{Re} \tilde{\mathcal{H}}$ au signe près.

Dans le cas impair, $\dim_{\mathbb{R}} E = n = 2r + 1$, on peut remarquer que l'on a les équivalences suivantes:

$$p - q \equiv 1, 5 \bmod 8 \Leftrightarrow r \equiv 1 \bmod 2$$

$$p - q \equiv 3, 7 \bmod 8 \Leftrightarrow r \equiv 0 \bmod 2.$$

Ce qui permet d'affirmer que l'on peut toujours prendre $\Lambda = \operatorname{Re} \tilde{\mathcal{H}}$ en toute dimension et toute signature.

On résume les résultats obtenus dans le tableau 1.

Tableau 1.

	$p-q=$	0	2	4	6	1	3	5	7
	$\dim_{\mathbb{R}} S =$	2^r	2^r	2^{r+1}	2^{r+1}	2^r	2^{r+1}	2^{r+1}	2^{r+1}
$p+q\equiv$	0	ω / —	ω / —	ω, η, α / σ	ω, η, α / σ				
$p+q\equiv$	2	— / ω	— / ω	α / ω, η, σ	α / ω, η, σ				
$p+q\equiv$	4	— / ω	— / ω	α / ω, η, σ	α / ω, η, σ				
$p+q\equiv$	6	ω / —	ω / —	ω, η, α / σ	ω, η, α / σ				
$p+q\equiv$	1					— / —	α / σ	— / —	α / σ
$p+q\equiv$	3					— / ω	— / ω, η	α / ω, η, σ	— / ω, η
$p+q\equiv$	5					— / —	α / σ	— / —	α / σ
$p+q\equiv$	7					ω / —	ω, η / —	ω, η, α / —σ	ω, η / —

Comparaison avec les résultats de Lawrynowicz et Rembielinsky [9]

Nous obtenons les mêmes résultats que Lawrynowicz et Rembielinsky dans les cas $p-q=0, 2, 3, 7 \bmod 8$.

Par contre nous obtenons des résultats différents et plus riches dans les cas $p-q=1, 4, 5, 6 \bmod 8$.

De façon détaillée, nous obtenons: 4 formes bilinéaires Λ linéairement indépendantes, au lieu de 2 dans les cas $p-q=4, 5, 6 \bmod 8$.

Une seule forme bilinéaire Λ au lieu de 2, dans le cas $p-q=1 \bmod 8$.

Remarquons que nous obtenons l'existence de paires de Hurwitz dans le cas $p-q=5 \bmod 8$ et $p+q=3, 7 \bmod 8$ et Λ antisymétrique (résultat non obtenu par Lawrynowicz et Rembielinsky).

Notons aussi qu' il est contradictoire d' obtenir 2 formes Λ dans le cas $p-q=1 \bmod 8$ et seulement une forme Λ dans les cas $p-q=0, 2 \bmod 8$ puisque le cas impair $p-q=1$ se déduit de facon naturelle de l'un des cas pairs $p-q=0$ ou $2 \bmod 8$.

Exemple. On considère l'espace de Minkowski réel E, muni d'un repère pseudo orthonormé (e_1, e_2, e_3, e_4) avec

$$(e_1)^2=+1 \qquad (e_2)^2=(e_3)^2=(e_4)^2=-1.$$

On note $C(Q)$ l'algèbre de Clifford réelle associée.

Nous allons construire une paire de Hurwitz pseudo-euclidienne $\{(F, Q_0), (S, \Lambda)\}$ où F sera un espace vectoriel réel de dimension 5, muni d'une forme quadratique non-dégénérée Q_0, de signature $(\rho, \sigma)=(4, 1)$.

Dans l'espace complexifié (E', Q'), nous considérons la base de Witt:

$$x_1=\frac{e_1+e_4}{2} \qquad x_2=\frac{\mathrm{i}e_2+e_3}{2}$$

$$y_1=\frac{e_1-e_4}{2} \qquad y_2=\frac{\mathrm{i}e_2-e_3}{2}.$$

On a: $\bar{x}_1=x_1$, $\bar{x}_2=-y_2$ et $x_\alpha y_\alpha+y_\alpha x_\alpha=1$, $\alpha=1, 2$, $\bar{y}_1=y_1$.

Posant $f=y_1y_2$, on prend $S'=C(Q')f$ pour espace spinoriel complexe, muni de la base spinorielle canonique:

$$\{f, x_1f, x_2f, x_1x_2f\}.$$

Notons que $\dim_{\mathbb{C}} S'=2^2=4$.

L'algèbre de Clifford réelle $C(Q)$ est isomorphe *à* l'algèbre matricielle $\mathbb{M}(2, \mathbb{H})$, et on prend pour espace de représentation irréductible de $C(Q)$, l'espace réalifieé $S=rS'$, de S'. $\dim_{\mathbb{R}} S=8$.

Nous considérons la base spinorielle de S:

$$b=\{f, x_1f, x_2f, x_1x_2f, \mathrm{i}f, \mathrm{i}x_1f, \mathrm{i}x_2f, \mathrm{i}x_1x_2f\}.$$

Nous considérons alors le sous-espace vectoriel F, de $C(Q)$, linéairement engendré par 1 et E. $\dim_{\mathbb{R}} F=5$. F opère par produit à gauche sur S.

F est muni de la forme quadratique non-dégénérée Q_0 telle que:

$$Q_0(\varepsilon_0)=1$$

$$Q_0(x)=-Q(x) \qquad \forall x \in E$$

$$g_0(1, x)=0 \qquad \forall x \in E$$

où g_0 est la forme bilinéaire non-dégénérée associée à Q_0. $(\varepsilon_0, e_4, e_3, e_2, e_1)$ est une base pseudo-orthonormée de F, on a:

$$Q_0(\varepsilon_0) = Q_0(e_4) = Q_0(e_3) = Q_0(e_2) = 1 \qquad Q_0(e_1) = -1.$$

Pour construire les formes $\mathbb{R}$-bilinéaires non dégénérées symétriques ou antisymétriques Λ sur S, vérifiant la condition de Hurwitz (1) ou la relation fondamentale (2), on considère tout d'abord les formes complexes $\tilde{\mathscr{B}}$ et $\tilde{\mathscr{H}}$ sur S'.

(a) La forme $\mathbb{C}$-bilinéaire non-dégénérée $\tilde{\mathscr{B}}$ sur S' est définie par:

$$\tilde{\mathscr{B}}(uf, vf)f = \tilde{\mathscr{B}}(uf)vf \qquad \forall uf, vf \in S'$$

on a $\tilde{\varepsilon} = (-1)^{2.3/2} = -1$ et $\tilde{\mathscr{B}}$ est antisymétrique. $\tilde{\mathscr{B}}(f, x_1x_2f) = 1$, $\tilde{\mathscr{B}}(x_1f, x_2f) = -1$ et $\tilde{\mathscr{B}}$ est nulle sur $S'^{+} \times S'^{-}$.

Les formes $\mathbb{R}$-bilinéaires $\omega = \mathrm{Re}\,\tilde{\mathscr{B}}$ et $\eta = \mathrm{Im}\,\tilde{\mathscr{B}}$ sur $S = rS'$ sont antisymétriques et vérifient encore la condition de Hurwitz.

On a:

$$\begin{array}{ll}
\omega(f, x_1x_2f) = 1 & \eta(\mathrm{i}f, x_1x_2f) = 1 \\
\omega(x_1f, x_2f) = -1 & \eta(f, \mathrm{i}x_1x_2f) = 1 \\
\omega(\mathrm{i}f, \mathrm{i}x_1x_2f) = -1 & \eta(\mathrm{i}x_1f, x_2f) = -1 \\
\omega(\mathrm{i}x_1f, \mathrm{i}x_2f) = 1 & \eta(x_1f, \mathrm{i}x_2f) = -1.
\end{array}$$

ω et η ont pour matrice dans la base b:

$$\omega \equiv \begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}$$

$$\eta \equiv \begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}.$$

On a $\det \omega = 1$ et $\det \eta = 1$, ω et η sont non-dégénérées sur S.

(b) La forme sesquilinéaire non-dégénérée sur S' est donnée par:

$$a\tilde{\mathscr{H}}(uf, vf)x_2f = \tilde{\mathscr{B}}(\overline{uf})vf \qquad \forall uf, vf \in S'.$$

On prend $a = \mathrm{i}$ de manière que $\tilde{\mathscr{H}}$ soit hermitienne.
On a: $\tilde{\mathscr{H}}(f, x_1f) = \mathrm{i}$, $\tilde{\mathscr{H}}(x_2f, x_1x_2f) = -\mathrm{i}$ et $\tilde{\mathscr{H}}$ est nulle sur $S'^{+} \times S'^{+}$ et $S'^{-} \times S'^{-}$.

On considère alors les formes $\mathbb{R}$-bilinéaires symétrique $\alpha = \mathrm{Re}\,\tilde{\mathscr{H}}$ et antisymétrique $\sigma = \mathrm{Im}\,\tilde{\mathscr{H}}$ sur $S = rS'$, qui vérifient encore les conditions de Hurwitz (1) ou (2).

On a:

$$\alpha(\mathrm{i}f, x_1 f) = 1 \qquad \sigma(f, x_1 f) = 1$$
$$\alpha(\mathrm{i}x_1x_2f, x_2f) = 1 \qquad \sigma(x_1x_2f, x_2f) = 1$$
$$\alpha(f, \mathrm{i}x_1f) = -1 \qquad \sigma(\mathrm{i}f, \mathrm{i}x_1f) = 1$$
$$\alpha(x_1x_2f, \mathrm{i}x_2f) = -1 \qquad \sigma(\mathrm{i}x_1x_2f, \mathrm{i}x_2f) = 1.$$

Les formes α et σ ont pour matrices dans base b de S:

$$\alpha \equiv \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\sigma \equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

On a det $\alpha = 1$ et det $\sigma = 1$, α et σ sont non-dégénérées sur S.

Il est facile de vérifier que les formes $\mathbb{R}$-bilinéaires non-dégénérées ω, η, et σ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$.

Si Λ *est symétrique*, on prend $\Lambda = a\alpha$, $a \in \mathbb{R}^*$ et det $\Lambda = a^8 \neq 0$.

Si Λ *est antisymétrique*, on prend $\Lambda = a\omega + b\eta + c\sigma$; $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$\Lambda \equiv \begin{vmatrix} 0 & c & 0 & a & 0 & 0 & 0 & b \\ -c & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & a & 0 & -c & 0 & b & 0 & 0 \\ -a & 0 & c & 0 & -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & c & 0 & -a \\ 0 & 0 & -b & 0 & -c & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & -c \\ -b & 0 & 0 & 0 & a & 0 & c & 0 \end{vmatrix}.$$

On trouve:

$$\det \Lambda = a^8 + b^8 + c^8 + 4(a^6b^2 + a^6c^2 + b^6c^2 + a^2b^6 + a^2c^6 + b^2c^6)$$
$$+ 6(a^4b^4 + a^4c^4 + b^4c^4) + 12(a^4b^2c^2 + a^2b^4c^2 + a^2b^2c^4).$$

On voit que det $\Lambda = 0$ si et seulement si $(a, b, c) = (0, 0, 0)$.

5. Applications

5.1. Paires de Hurwitz et algèbres de Lie $\mathbb{Z}_2$ graduées

Soit $V = V_0 \oplus V_1$ un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué, l'algèbre des endomorphismes de V, $\mathrm{End}(V) = \mathrm{End}_0(V) \oplus \mathrm{End}_1(V)$, munie du crochet de Lie gradué $[u, v] = uv - (-1)^{|u||v|} vu$ où $|u|$, $|v|$ désignent les degrés de u et v, lorsqu'ils existent, est une algèbre de Lie $\mathbb{Z}_2$-graduée.

Si, de plus, V est muni d'une forme bilinéaire non dégénérée h telle que:

$$h/_{v_0} = g \text{ est symétrique}$$

$$h/_{v_1} = \Lambda \text{ est antisymétrique}$$

$$h(V_0, V_1) = h(V_1, V_0) = 0.$$

On considère

$$\mathscr{G}_0 = \{u \in \mathrm{End}_0(V) \colon h(ux, y) + h(x, uy) = 0, \forall x, y \in V_i, i = 0 \text{ ou } 1\}$$

$$\mathscr{G}_1 = \{u \in \mathrm{End}_1(V) \colon h(ux, y) = h(x, uy), \forall x \in V_1\ \forall y \in V_0\}$$

alors $\mathscr{G} = \mathscr{G}_0 \oplus \mathscr{G}_1$ est une sous-algèbre de Lie graduée de $\mathrm{End}(V)$, appelée algèbre de Lie graduée orthosymplectique.

Considérant une paire de Hurwitz pseudo-euclidienne $\{(F, Q_0),(S, \Lambda)\}$ avec $V = F \oplus S$ et Λ antisymétrique, on peut aisément construire une algèbre de Lie graduée orthosymplectique.

De plus, on peut définir sur $F \oplus S$, une loi 'd'interaction' notée o (cf. Crumeyrolle [3]) en posant:

$$\forall x \in F, \forall \varphi \in S, x \circ \varphi = \varphi \circ x = x\varphi;\ x \circ \varphi \in S$$

$$\forall \varphi, \psi \in S, \varphi \circ \psi \in F \text{ et } g(\varphi \circ \psi, x) = \Lambda(x\varphi, \psi) \qquad \forall x \in F.$$

On définit alors l'action de S sur $V = F \oplus S$ en posant:

$$\varphi(x) = -x\varphi \qquad \forall x \in F$$

$$\varphi(\psi) = \varphi \circ \psi \qquad \forall \psi \in V_1.$$

Les éléments φ de S peuvent alors être considérés comme des éléments de degré 1 de l'algèbre orthosymplectique $\mathscr{G} = \mathscr{G}_0 \oplus \mathscr{G}_1$.

5.2. Fibrations en paires de Hurwitz

Soit M une variété différentiable réelle, pseudo-riemannienne, de dimension paires $n = 2r$, et soit Q la forme quadratique non dégénérée sur M, de signature (p, q).

On suppose que M possède une structure G_0-spinorielle, c'est-à-dire que le groupe structural $\mathrm{O}(Q)$ du fibré pseudo-riemannien se réduit à la projection $p(\mathrm{G}_0)$, où G_0 est le groupe de Clifford réduit, et p est l'application $p(g)x = gxg^{-1}$, p: $\mathrm{Pin}\, Q \to \mathrm{O}(Q)$ revêtement d'ordre 2 du groupe pseudo-orthogonal.

On sait alors que dans ce cas, il existe sur M, un champ global de r-vecteurs isotropes $x \to f_x$, ainsi qu'un champ global de spineurs purs $x \to (\gamma f)_x$.

Il existe alors dans le fibré spinoriel complexe $S'(M)$, au-dessus de M, un champ global de formes $\mathbb{C}$-bilinéaires $x \to \tilde{\mathscr{B}}_x$, de conjugaisons de charges $x \to \mathscr{C}_x$, et un champ global de formes hermitiennes $x \to \tilde{\mathscr{H}}_x$.

Pour obtenir un fibré en paires de Hurwitz, on considère le sous-fibré $\mathscr{F}$ du fibré de Clifford Clif(M, Q):

$$\mathscr{F} = (\mathbb{R} \times M) \oplus T(M)$$

$\mathscr{F}$ est une fibré vectoriel réel, de rang $n+1$, de fibre type $\mathbb{R}^{n+1}$.

On définit alors le champ de formes quadratiques $x \to Q_{0x}$ dans $\mathscr{F}$, au-dessus de M.

On considère aussi, suivant la signature de Q, le fibré spinoriel réalifié $S(M) = RS'(M)$ (cas quaternionique) ou bien le fibré en spineurs de Majorana $S_1(M)$ (cas rèel).

Le fibré vectoriel $\mathscr{F}$ opère naturellement sur le fibré spinoriel par l'action usuelle dans le fibré de Clifford Clif(M, Q).

Il nous reste à remarquer que la propriété de Hurwitz

$$\Lambda_x(z_x\varphi_x, z_x\psi_x) = Q_{0x}(z_x)\Lambda_x(\varphi_x, \psi_x)$$

$\forall z_x \in \mathscr{F}_x$, $\forall \varphi_x$, $\psi_x \in S(M)_x$, au-dessus de chaque $x \in M$, est conservée par l'action des fonctions de transitions.

Ceci découle du fait que si $g \in \mathrm{G}_0$, on a la propriété d'équivariance: $g(z\psi) = (p(g)z)(g\psi)$, et d'après le paragraphe 2, l'action des fonctions de transitions $p(g_{\alpha\beta}(x)) \times g_{\alpha\beta}(x)$, $g_{\alpha\beta}(x) \in \mathrm{G}_0$, respecte la condition de Hurwitz.

En dimension impaire, rien d'essentiel n'est modifié. On suppose que M est pseudo-riemannienne, orientable et qu'elle admet une structure G_0^+-spinorielle, où G_0^+ est le groupe de Clifford spécial réduit.

La construction précédente s'adapte alors aisément.

References

[1] Bugajska K 1986 Spinors and space-times *J. Math. Phys.* **27** 853-8

[2] Chevalley C 1954 *The algebraic theory of spinors* (Columbia, NY: Columbia University Press)

[3] Crumeyrolle A 1989 *Clifford algebras and spinor structures* (Dordrecht: Reidel)

[4] Crumeyrolle A 1987 Conjugation in spinor spaces. Majorana and Weyl spinors *Supplemento ai rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* Série II n°14

[5] Hurwitz A 1933 *Mathematishe Werke II* (Basel: Birkhauser) pp 565-71

[6] Hurwitz A 1933 *Mathematishe Werke II* (Basel: Birkhauser) pp 641-66

[7] Lawrynowicz J and Rembielinsky J 1985 Hurwitz pairs equipped with complex structures (*Lectures Notes in Mathematics* **1165**) (Berlin: Springer)

[8] Lawrynowicz J and Rembielinsky J 1986 Pseudo-euclidean Hurwitz pairs and generalised Fueter equations *Clifford algebras and their applications in mathematical physics* (Dordrecht: Reidel) pp 39-48

[9] Lawrynowicz J and Rembielinsky J 1987 Pseudo-euclidean Hurwitz pairs and the Kaluza-Klein theories *J. Phys. A: Math. Gen.* **20** 5831-48

[10] Randriamihamison L S 1988 *Algèbres de Clifford et paires de Hurwitz pseudo-euclidiennes Thèse* Toulouse

[11] Shapiro D B 1984 Products of sums of squares *Expositones Mathematical* **2** pp 235-61